Konforme Abbildung
eines von gewissen Kurven begrenzten Flächenstücks auf den Einheitskreis.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

verfasst und einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

Kgl. Bayr. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt am 23. Mai 1906

von

Carl Horn
aus Ebersberg.

München 1907.
K. Hof- und Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Konforme Abbildung
eines von gewissen Kurven begrenzten Flächenstücks auf den Einheitskreis.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

verfasst und einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

Kgl. Bayr. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

ACAD. LUDW. BAT. BIBL.

vorgelegt am 23. Mai 1906

von

Carl Horn
aus Ebersberg.

München 1907.
K. Hof- und Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Von den Abbildungsaufgaben, welche die konforme Abbildung eines von den Kurven

$$\alpha\varphi(z) + \alpha_1\varphi_1(z_1) + \beta = 0$$

begrenzten Flächenstücks auf die Halbebene $Y > 0$ bezw. den Einheitskreis vermittels der Transformation $t = \varphi(z)$ zurückführen auf die Abbildung eines geradlinigen Polygons, sind bisher diejenigen Fälle behandelt, in denen $\varphi(z)$ eine ganze rationale bezw. rational gebrochene Funktion n ten Grades von z ist. Desgleichen ist diese Erweiterung durch $t = \varphi(z)$ ausgedehnt auf alle Kurvenpolygone, gebildet von Kreisen, und auf zirkulare bezw. bizirkulare Kurven, wobei allen diesen Aufgaben abbildbarer Kurvenpolygone die von Lindemann zuerst gegebene allgemeine Abbildungsmethode gemeinsam ist; es erübrigen noch diejenigen Fälle, in denen $t = \varphi(z)$ nicht mehr eine eindeutige Funktion ist, sondern t und z miteinander durch eine allgemeine algebraische Gleichung m ten Grades in t, n ten Grades in z zusammenhängen, also die Abbildung von Kurvenpolygonen

$$\alpha t + \alpha_1 t_1 + \beta = 0$$

wobei $\Phi_{nm}(z_1 t) = 0$.

Ein spezieller Fall solcher Kurvenpolygone ist behandelt bei Göttler (Diss. pag. 58 ff.), nämlich die Abbildung eines

---

Literatur: J. Göttler: Konforme Abbildung eines von konzentrischen, gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven n ter Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis. München, Dissertation 1897. Ebenda die weitere Literatur über konforme Abbildungen speziell die grundlegenden Abhandlungen von Schwarz, Christoffel und Lindemann.

L. Marc: Konforme Abbildung eines von irregulären Hyperbeln n ter Ordnung begrenzten Flächenstücks auf den Einheitskreis. München, Dissertation 1901.

N. Perry: Das Problem der konformen Abbildung für eine spezielle Kurve von der Ordnung 3n. Dissertation, München 1901 und Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1902, S. 43.

von konfokalen Parabeln n ter Ordnung begrenzten Flächenstücks, wobei $\varphi(z) = z^{\frac{1}{n}}$ ist, einer derjenigen später zu behandelnden Fälle, in denen die Mehrdeutigkeit in der Abbildungsfunktion keine Rolle spielt.

Die Abbildung aller auf den Ansatz $\alpha\varphi(z) + \alpha_1\varphi_1(z_1) + \beta = 0$ zurückgehenden Kurvenpolygone führt bekanntlich auf die Abbildungsfunktion

$$\frac{d}{dZ}\left(\log(\varphi'(z)\cdot\frac{dz}{dZ}\right) = \frac{\varphi''(z)}{\varphi' z}z' + \frac{z''}{z'}$$

und verlangt wegen der Holomorphität dieser Funktion, dass folgende Bedingung erfüllt ist: $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ muss eine im Innern des abzubildenden Flächenstücks eindeutige Funktion sein. Diese Bedingung ist hier selbst im Falle, dass aus $\Phi(z_1 t) = 0$ t als Funktion von z explizit dasrtellbar ist, im allgemeinen nicht erfüllt.

Es möge die gestellte Aufgabe in folgender Reihenfolge behandelt werden:

I. Diejenige Klasse von Fällen, in denen t als irrationale Funktion von z darstellbar, hingegen $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ eine im allgemeinen rational gebrochene eindeutige Funktion von z ist.

II. Die speziellen Fälle $t = \sqrt{z^2 - 1}$, $t = \sqrt{z + \frac{1}{z}}$.

III. Ein spezieller Fall, in dem t zwar explizit als Funktion von z darstellbar ist, aber $\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}$ Irrationalitäten enthält, nämlich $t^3 + t = z$.[1])

IV. Spezielle Fälle ebensolcher Kurvenpolygone, welche, in der z-Ebene in mehreren Blättern verlaufend, auf einfache geradlinige Polygone der t-Ebene führen.

---

[1]) Hans Meyer: Über die von geraden Linien und Kegelschnitten gebildeten Scharen von Isothermen, sowie über einige von speziellen Kurven dritter Ordnung gebildeten Scharen von Isothermen. Inauguraldissertation. Zürich 1870.

I.

Unter den Transformationen $\Phi(z, t) = 0$ sind diejenigen Fälle ausgezeichnet, in denen A als mehrdeutige Funktion von z darstellbar ist, hingegen $\frac{\varphi'' z}{\varphi' z}$ eine eindeutige, im allgemeinen rational gebrochene Funktion von z ist, bei denen man also ohne Übergang über die geradlinigen Polygone von der Z-Ebene zur z-Ebene übergehen kann; analaytisch heisst somit die Aufgabe diese Funktionen $\varphi(z)$ zu finden:

$$\frac{\varphi'' z}{\varphi' z} = R(z)$$

oder integriert: $$\varphi(z) = \int e^{\int R(z)\,dz}\,dz.$$

Auf welche Klasse irrationaler Funktionen führt dieses Integral? Es möge $R(z)$ darstellbar sein in der Form:

$$R(z) = \sum \frac{\alpha_i}{z - A_i}$$

die Formen $R(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + \sum \frac{\alpha_i}{z - A_i}$, ferner:

$$R(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + \sum \frac{\alpha_i}{z - A_i} + \frac{\beta_i}{(z - B_i)^p}$$

$$+ \frac{\beta_i'}{(z - B_i)^{p-1}} + \ldots\ldots$$

mögen deshalb ausgeschlossen sein, weil sie auf transzendente Funktionen führen. Unter obiger Annahme wird:

$$\varphi(z) = \int e^{\sum \log (z - A_i)^{\alpha_i}}\,dz.$$

$$= \int \Pi (z - A_i)^{\alpha_i}\,dz.$$

Auf ganze rationale Funktionen führen die Fälle, in denen die α_i ganze positive Zahlen sind: auf gebrochene rationale bezw. transzendente Funktionen (Logarithmen) die Fälle, in denen die α_i negative ganze Zahlen sind; wenn die α_i gebrochene Zahlen sind, kommt man im allgemeinen auf transzendente Funktionen (Logarithmen, kyklometrische, elliptische und hyperelliptische Funktionen) mit Ausnahme eines Falles, wo

$\varphi(z) = \int \Pi (z - A_i)^{\alpha_i} dz$ sich auf die Form bringen lässt:

$$\varphi(z) = \int \frac{m}{n} r(z)^{\frac{m}{n}-1} \cdot r'(z)\, dz = r(z)^{\frac{m}{n}}.$$

Es bedeutet diese Transformation gegenüber $\alpha z^{\frac{m}{n}} + \alpha_1 z_1^{\frac{m}{n}} + \beta = 0$ eine Verallgemeinerung insofern, dass statt z eingesetzt werden kann $\varphi(z)$, d. h., dass die abzubildenden Polygone einer mehrfachen Riemann'schen Fläche angehören können und die t-Ebene ebenfalls mehrblättrig ist.

Es ist, wenn zur Vereinfachung $r(z)$ zunächst als ganze rationale Funktion angenommen wird:

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = \frac{\left(\frac{m}{n}-1\right) r'^2 + r'' r}{r' \cdot r} = \frac{\left(\frac{m}{n}-1\right) r'}{r} + \frac{r''}{r'}$$

woraus man sieht, dass die Holomorphität von

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} z' + \frac{z''}{z'}$$

gestört wird durch die Punkte $r = 0$ und $r' = 0$, d. h. durch die Vezweigungspunkte der z- und t-Fläche. Als besondere Fälle können dabei diejenigen vorkommen, bei denen $r(z)$ mehrfache Wurzeln hat, d. h. r und r' gleichzeitig 0 werden.

Befinden sich Punkte $r = 0$ im Innern, so gibt die Entwicklung an dieser Stelle für einen dieser Punkte $(z = g_i)$, $r = \Pi (z - g_i)$

$$z - g_i = (Z - G_i)\, P(Z - G_i)$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{Z - G_i} + P$$

$$\Phi(z, Z) = \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \cdot z' + \frac{z''}{z'} = \frac{\frac{m}{n} - 1}{Z - G_i} + P(Z - G_i) \qquad (1)$$

Für einen Punkt von $r' = 0$, in dem nicht auch r zu 0 wird, im Innern lautet die Funktion ($r' = \Pi (Z - G_i')$

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \cdot z' + \frac{z''}{z'} = \frac{1}{Z - G_i'} + P(Z - G_i') \tag{2}$$

so dass man unter Berücksichtigung der konjug. imaginären Punkte die holomorphe Abbildungsfunktion erhält

$$\frac{\varphi'' z}{\varphi' z} \cdot z' + \frac{z''}{z'} - \Sigma \frac{\frac{m}{n} - 1}{Z - G_i} - \Sigma \frac{\frac{m}{n} - 1}{Z - G_{ii}} - \Sigma \frac{1}{Z - G_i'}$$

$$- \Sigma \frac{1}{Z - G_{ii}'} = P,$$

welche keine singulären Punkte mehr hat und deshalb in bekannten Schlüssen gleich 0 zu setzen ist.

Für einen Punkt $r = 0$ auf dem Rande mit dem Winkel $\beta_\lambda \pi$ in der z-Ebene heisst die Entwicklung:

$$\frac{\varphi'' z}{\varphi' z} z' + \frac{z''}{z'} = \frac{\frac{m}{n} \beta_\lambda - 1}{Z - B\lambda} + P \tag{3}$$

für einen Punkt $r' = 0$, wobei $r = 0$ und $r' = 0$ lauter einfache Wurzelpunkte haben mögen:

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} z' + \frac{z''}{z'} = \frac{2\beta\lambda' - 1}{Z - B\lambda'} \tag{4}$$

Ist $z = g$ eine δ fache Wurzel von $r = 0$, so ändern sich diese Formeln entsprechend, man erhält z. B. für einen solchen Punkt im Innern:

$$r = (z - g)^\delta \Pi (z - g_i)$$

$$r^{\frac{m}{n}} = (Z - G)^{\frac{m}{n}\delta} P$$

$$\frac{d\left(\log \frac{d\, r^{\frac{m}{n}}}{dZ}\right)}{dZ} = \frac{\frac{m}{n}\delta - 1}{Z - G} + P \tag{5}$$

Eine eigene Diskussion bedarf hier der Punkt $z = \infty$, weil er als einfacher Punkt oder als Windungspunkt auftreten kann; ist r(z) darstellbar in der Form

$$r = z^{m_1} + a_1 z^{m_1 - 1} + \ldots a_{m_1} = \Pi (z - \alpha_{m_1})$$

so zeigt die Transformation $z = \frac{1}{\zeta}$, dass $\zeta = 0$, $z = \infty$ Windungspunkt $m_1 - 1$ ter Ordnung wird.

Die Entwicklung ergibt:

$$\frac{d\left(\log \frac{d\, r^{\frac{m}{n}}}{dZ}\right)}{dZ} = -\frac{m_1 \cdot \frac{m}{n} + 1}{Z - \Gamma} + P \qquad (6)$$

und für den Punkt $z = \infty$ mit Winkel γ_ρ am Rande:

$$\frac{d \log \frac{d\, r^{\frac{m}{n}}}{dZ}}{dZ} = -\frac{m_1 \frac{m}{n} \gamma_\rho + 1}{Z - C_\rho} \qquad (7)$$

Diese Formeln ändern sich wenn

$$r = \frac{z^{m_1} + a_1 z^{m_1 - 1} + \ldots . a_{m_1}}{z^{m_2} + b_1 z^{m_2 - 1} + \ldots . b_{m_2}} = \frac{r_1(z)}{r_2(z)},$$

weil dann $z = \infty$ nicht mehr Windungspunkt zu sein braucht; desgleichen erfahren die andern Formeln folgende Abänderungen:

Es sei $m_1 > m_2$ und $z^{m_2} + b_1 z^{m_2 - 1} + \ldots . b_{m_2} = 0$ habe lauter einfache Wurzeln.

Für einen Punkt von $r_2 = 0$ im Innern ($z = k$, $Z = K$ entsprechende Punkte) erhält man:

$$r^{\frac{m}{n}} = (Z - K)^{-\frac{m}{n}} P\,(Z - K)$$

$$\frac{d}{dZ}\left(\log \frac{d\, r^{\frac{m}{n}}}{dZ}\right) = -\frac{\frac{m}{n} + 1}{Z - K} + P \qquad (8)$$

Liegt der Punkt $z = \infty$ im Innern und entspricht ihm $Z = \Delta$, so gilt

$$z = \frac{1}{Z - \Delta} \cdot P$$

$$r^{\frac{m}{n}} = (Z - \Delta)^{(m_1 - m_2)\frac{m}{n}} P$$

$$\frac{d}{dZ}\left(\log \frac{d\, r^{\frac{m}{n}}}{dZ}\right) = -\frac{(m_1 - m_2)\frac{m}{n} + 1}{Z - \Delta} + P \qquad (9)$$

Im allgemeinsten Falle $r = \frac{r_1(z)}{r_2(z)}$ lauten somit die Abbildungsfunktionen:

1. Punkte $r_1(z) = 0$, $r'(z) = 0$, $r_2(z) = 0$ im Innern, $z = \infty$ auf dem Rande:

$$\varphi(z) = \int_0^Z \frac{\Pi (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \Pi \{(Z - G_i)(Z - G_{1i})\}^{\frac{m}{n} - 1}}{(Z - C_\rho')^{(m_1 - m_2)\frac{m}{n}\gamma_\rho' + 1}} \cdot \frac{\Pi (Z - G_1')(Z - G_{11}')\, dZ}{\Pi \{(Z - K_1)(Z - K_{11})\}^{\frac{m}{n} + 1}} \qquad (10)$$

2. Punkt $z = \infty$ im Innern, Punkte $r_1(z) = 0$ $r'(z) = 0$ $r_2(z) = 0$ auf dem Rande:

$$\varphi(z) = \int_0^Z \frac{\Pi (Z - A_\mu)^{\alpha_\mu - 1} \Pi (Z - B_\lambda)^{\frac{m}{n}\beta_\lambda - 1}}{\{(Z - \Delta)(Z - \Delta_1)\}^{(m_1 - m_2)\frac{m}{n} + 1}} \cdot \frac{\Pi (Z - B_{\lambda'})^{2\beta_{\lambda'} - 1}\, dZ}{(Z - K')^{\frac{m}{n} k_\rho + 1}} \qquad (11)$$

II. Spezielle Fälle.

Als Beispiel möge zuerst die Abbildung $t = \sqrt{z^2 - 1}$ betrachtet werden, also Flächenstücke, welche von Kurven $\alpha\sqrt{z^2 - 1} + \alpha_1\sqrt{z_1^2 - 1} + \beta = 0$ begrenzt werden. t-Ebene und z-Ebene sind zweiblättrig, die Punkte, in denen die Holomorphität gestört ist, sind $[r(z) = z^2 - 1,\ r'(z) = 2z]$ $z = \pm 1$, $z = 0$; $z = \infty$ ist ein Windungspunkt erster Ordnung; die Verzweigungsschnitte der z-Ebene sind die geraden $i \leqq t \leqq i\,\infty$, $-i \geqq t\, i\,\infty$, der Übergang der t-Ebene in die z-Ebene ist schematisch in Fig. 4 Taf. VI angegeben. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, $m_1 = 2$ $m_2 = 0$.

Wir haben folgende Fälle zu betrachten.

1. Flächenstück begrenzt von einer aus zwei Zweigen bestehenden Kurve mit den Winkeln π im Unendlichen und $z = 0$ im Innern; in der t-Ebene entspricht ihm eine Halb-

ebene, zweifach überdeckt mit dem Punkte i im Innern. $G = i\ C_1 = 1\ C_2 = -1$. (Fig. 5, Taf. VI.)

$$\varphi(z) = a \int_0^Z \frac{(Z^2+1)}{(Z^2-1)^2}\, dZ + b$$

oder: $\sqrt{z^2-1} = \frac{Z}{Z^2-1}$. nach Formel (1, 7)

2. Flächenstück begrenzt von einem Zweig mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ im Punkt 0 und dem Punkt $+1$ im Innern. $G = i\ C = \infty$. (Fig. 1, Taf. VII.) F. (1, 4, 7) wo $\beta\lambda' = \frac{1}{2}\ \gamma\rho = 0$

$$\sqrt{z^2-1} = a \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^2+1}} + b$$

oder: $\sqrt{z^2-1} = \log\,(Z + \sqrt{Z^2+1})$.

3. Flächenstück begrenzt von einem Zweig mit $z = -1$ und $z = 0$ im Innern. (Fig. 2, Taf. VII.) F. (1, 2) $z = \infty$ $Z = \infty$

$$\sqrt{z^2-1} = a \int \frac{(Z^2+G^2)\, dZ}{\sqrt{Z^2+G^2}} + b.$$

4. Flächenstück begrenzt von einem Zweig mit $z = \pm 1$ und $z = 0$ im Innern. (Fig. 3, Taf. VII.) F. (1, 2) $z = \infty$ $Z = \infty$

$$\sqrt{z^2-1} = a \int \frac{(Z^2+G_1^2)\, dZ}{\sqrt{(Z^2+G_2^2)(Z^2+G_3^2)}} + b.$$

5. Flächenstück begrenzt von zwei Kurvenstücken mit Winkel $\frac{3\pi}{2}$ bei 0 und $z = \pm 1$ im Innern. (Fig. 4, Taf. VII.) F. (1, 4) $\beta\lambda' = \frac{3}{2}$

$$\sqrt{z^2-1} = a \int \frac{Z^2\, dZ}{\sqrt{(Z^2+\alpha^2)(Z^2+\beta^2)}} + b.$$

6. Flächenstück begrenzt von zwei Kurvenstücken mit Winkel π im Punkt 0, $z = -1$ im Innern. (Fig. 5, Taf. VII.) F. (1, 4) $\beta\lambda = 1$

$$\sqrt{z^2-1} = a \int \frac{Z\, dZ}{\sqrt{Z^2+\alpha^2}} + b = a' \sqrt{Z^2+\alpha^2} + b.$$

7. Flächenstück begrenzt von einem Zweig und der geraden Linie $1 \leqq z \leqq \infty$. $B\lambda = \infty$. Zwei Winkel $\gamma_\rho = 0$ im Unendlichen. (Fig. 6, Taf. 7.) F. (3, 7) $C_1 = 1$ $C_2 = -1$

$$\sqrt{z^2 - 1} = a \int \frac{dZ}{Z^2 - 1} + b = a' \log \frac{Z - 1}{Z + 1} + b'.$$

8. Flächenstück begrenzt von vier Zweigen zweier Kurven mit vier Winkeln 0 im Unendlichen und $z = 0$ im Innern. $C_1 = 1$ $C_2 = -1$ $C_3 = 0$ $C_4 = \infty$ (Fig. 6, Taf. VI). F. (2, 7)

$$\sqrt{z^2 - 1} = a \int \frac{Z^2 + 1}{Z(Z^2 - 1)} dZ + b = a' \log \frac{Z^2 - 1}{Z} + b.$$

9. Flächenstück mit $z = -1$ im Innern, $z = 0$ als Windungspunkt mit Winkel π auf dem Rande und zwei Winkeln 0 im Unendlichen. $G = i$, $B'\lambda = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $\gamma_\rho = 0$ (Fig. 7, Taf. VI). $\beta\lambda = 1$ F. (1, 3, 7)

$$\sqrt{z^2 - 1} = a \int \frac{Z\, dZ}{(Z^2 - 1)\sqrt{Z^2 + 1}}$$

$$+ b = a \log \frac{\sqrt{Z^2 + 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{Z^2 + 1} - \sqrt{2}} + b.$$

10. Flächenstück mit $z = 1$, $z = -1$, $z = 0$ im Innern, zwei Winkeln 0 im Unendlichen. $C_1 = 0$ $C_2 = \infty$ (Fig. 8, Taf. VI). F. (1, 2, 7)

$$\sqrt{z^2 - 1} = \int \frac{Z(Z - G')(Z - G_1')\, dZ}{Z\sqrt{(Z - G_1)(Z - G_{11})(Z - G_2)(Z - G_{12})}}$$

11. Flächenstück mit $z = -1$ im Innern, $z = 0$ mit Winkel π am Rande, zwei Winkeln $\frac{\pi}{2}$ am Rande. (Fig. 9, Taf. VI.) F. (1, 10, 11)

$$\sqrt{z^2 - 1} = a \int \frac{(Z - B')\, dZ}{\sqrt{(Z - G_1)(Z - G_2)(Z - A_1)(Z - A_2)}} + b.$$

Es ist selbstverständlich auch bei dieser Art von Polygonen möglich, zuerst auf die geradlinigen Polygone der t-Ebene zurückzugehen, nur kann es dabei vorkommen, dass man zunächst, um einfach zusammenhängende Flächenstücke

zu erhalten, neue Ränder zu den schon vorhandenen dazunehmen muss; diese Ränder können aber dann immer durch eine weitere Transformation beseitigt werden, wie z. B. beim einfachen Fall der Parabel, wo man bei der Abbildung des Innern über das entsprechende Polygon der t-Ebene die Funktion erhält: $\sqrt{z} = \log(Z + \sqrt{Z^2 - 1})$, welche dann durch $\zeta = \sqrt{Z^2 - 1}$ auf $\sqrt{z} = \log(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1})$ gebracht wird, d. h. diejenige Transformation, welche man beim unmittelbaren Übergang von der z-Ebene zur ζ-Ebene (Z-Ebene) erhält.

Als zweites Beispiel möge die Abbildung $t = \sqrt{z + \frac{1}{z}}$ betrachtet werden; t-Ebene und z-Ebene sind zweiblättrig. Singuläre Punkte der z-Ebene sind $z = 0$, $z = \infty$, $z = \pm i$, $z = \pm 1$, denen in der t-Ebene $t = \infty$, $t = 0$, $t = \pm\sqrt{2}$ entsprechen; der Verlauf einiger Kurven $t = \lambda$ ist in Fig. 7 Taf. VII systematisch angegeben; die Geraden $(t = \xi + i\eta)$ $\xi = 0$ und $\eta = 0$ geben eine Halbgerade und einen Halbkreis; unter den Kurven $\xi = \lambda$ ist eine spezielle, nämlich diejenige, welche $\xi = \sqrt{2}$ entspricht; sie hat die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} 2 - \eta^2 &= x + \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 2\sqrt{2}\,\eta &= y - \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \text{ oder } 16(x^2 + y^2)^2 - y^2(x^2 + y^2 - 1)^2 - 8((x^2 + y^2)x + x(x^2 + y^2)) - 0$$

Die Kurve hat in $z = 0$ und $z = \infty$ Spitzen und in $z = 1$ einen Doppelpunkt. Von den andern, den Geraden $\xi = \lambda$ entsprechenden Kurven haben diejenigen Kurven Spitzen in $z = 0$ und $z = \infty$, welche $0 \leqq \xi \leqq \sqrt{2}$ entsprechen; sie bestehen aus einem einzigen Zuge; dagegen bestehen die $\sqrt{2} \leqq \zeta \leqq \infty$ entsprechenden aus zwei getrennten Zügen, welche innerhalb und ausserhalb des Kreises mit dem Radius 1 verlaufen.

Aus den Kurven, welche $\xi = 0$ und $\eta \geqq 0$ entsprechen (Halbkreis und Halbgerade), lassen sich eine Reihe von speziellen Fällen ableiten; von grösserem Interesse sind die-

jenigen Abbildungen, bei welchen die Kurven $0 < \xi \leqq \infty$ als Begrenzung auftreten.

1. Flächenstück begrenzt von einem Kurvenstück mit Winkel 2π in $z = 0$ und Winkel $\frac{\pi}{2}$ in $z = 1$ $K' = \infty$ (Fig. 8. Taf. VII). F. (11)

$$\sqrt{z + \frac{1}{z}} = a \int d Z + b = a Z + b.$$

2. Äusseres desselben Flächenstücks; $z = \pm i$, $z = -1$ im Innern, $z = 0$ mit Winkel 0, $z = 1$ mit Winkel $\frac{3\pi}{2}$ am Rande, $z = \infty$ im Innern. F. (10, 11)

$$\sqrt{z + \frac{1}{z}} = a \int \frac{(Z^2 + D^2)(Z - B\lambda')^2 \, d Z}{(Z^2 + A^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \{(Z^2 + B^2)(Z^2 + C^2)\}^{\frac{1}{2}}} + b.$$

3. Flächenstück begrenzt von einer Spitzenkurve, aus einem Zug bestehend, ohne Doppelpunkt. $z = \infty$ am Rande, $z = 0$ (d. i. $Z = 0$) mit Winkel 2π am Rande, $z = 1$ im Innern. (Fig. 9, Taf. VII.) F. (10, 11) $C_1' = \infty$ $K' = 0$ $k_\rho = 2$ $G_1' = i$

$$\sqrt{z + \frac{1}{z}} = a \int \frac{(Z^2 + 1) \, d Z}{Z^2} + b.$$

Das Innere dieser Kurve wird abgebildet durch:

($K' = 0$, $k_\rho = 0$)
$$\sqrt{z + \frac{1}{z}} = a \int \frac{(Z^2 + C^2) \, d Z}{\{(Z^2 + A^2)(Z^2 + B^2)\}^{\frac{1}{2}} Z} + b.$$

4. Flächenstück begrenzt von einer Kurve mit Doppelpunkt, $z = \infty$ mit Winkel 0, $z = 1$ mit Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $z = 0$ mit Winkel 0 am Rande, $z = -1$, $z = \pm i$ im Innern. (Fig. 10, Taf. VII.) F. (10, 11) $K' = 0$ $k_\rho = 0$

$$\sqrt{z + \frac{1}{z}} = a \int \frac{(Z^2 + A^2) \, d Z}{\{(Z^2 + B^2)(Z^2 + C^2)\}^{\frac{1}{2}} \cdot Z} + b.$$

5. Flächenstück begrenzt von zwei Kurven mit $z = 1$ im Innern, $z = 0$ mit Winkel 2π und $z = \infty$ zweimal mit Winkeln 0 am Rande ($C_1' = 1$ $C_2' = -1$). (Fig. 11, Taf. VII.)

$$\sqrt{z+\frac{1}{z}} = a\int\frac{(Z^2+1)\,dZ}{Z^2-1} + b = a'Z + b'\log\frac{Z-1}{Z+1} + c'.$$

6. Flächenstück begrenzt von zwei Zweigen zweier verschiedenen Kurven mit Winkel 0 im Unendlichen, Winkel 2π in $z=0$, Winkel π in $z=1$. (Fig. 12, Taf. VII.) F. (10, 11)

$$\sqrt{z+\frac{1}{z}} = a\int\frac{Z-1}{Z^2}\,dZ + b = a'\log Z + \frac{b'}{Z} + c'.$$

In solcher Weise lassen sich eine grosse Anzahl spezieller Fälle durchführen, insbesondere wenn man die Kurven $\eta=\lambda$ dazunimmt und die Punkte $z=0$, $z=\pm 1$, $z=\pm 1$ einzeln oder gruppenweise im Innern annimmt. Desgleichen liessen sich leicht mit Hilfe dieser Abbildung Abbildungsaufgaben für die Kurven $\alpha\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} + \alpha_1\sqrt{z_1^{\,2}+\frac{1}{z_1^{\,2}}} + \beta = 0$ studieren, unter denen sich ebenfalls Doppelpunktskurven befinden.

Es sei noch, obwohl es ausserhalb der gestellten Aufgabe liegt, auf die Anwendbarkeit des Ansatzes:

$$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = R(z) \text{ oder } \varphi(z) = \int e^{\int R(z)\,dz}\,dz$$

hingewiesen. Leicht erkennbare transzendente Transformationen dieser Art, welche den unmittelbaren Übergang von der z-Ebene zur Z-Ebene gestatten und sich nach der bekannten Methode, die singulären Punkte zu beseitigen, behandeln lassen, sind:

$\varphi(z) = r^{\frac{m}{n}}(z)\cdot e^{z}$	$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = \frac{r''+2r'+r}{r'+r}$	sing. Punkte	$r'+r=0$
$\varphi(z) = \arcsin z$	$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = \frac{z}{z^2-1}$	„ „	$z^2-1=0$
$\varphi(z) = \operatorname{arctg} z$	$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = -\frac{2z}{z^2+1}$	„ „	z^2+1
$\varphi(z) = \log r(z)$	$\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = \frac{rr''-r'^2}{r^2}$	„ „	$r=0$

III. Die Abbildung $t^3 + t = z$.

Da einem Werte von z drei verschiedene Werte von t entsprechen, während einem t nur ein einziger Wert von z entspricht, ist nach der Riemann'schen Vorstellungsweise die z-Ebene dreiblättrig, die t-Ebene einblättrig zu denken; die Kurvenpolygone der Z-Ebene, um deren Abbildung es sich handelt, werden daher im allgemeinen in den drei Blättern verlaufen, mittels der Verzweigungsschnitte in die drei Blätter übergehen und es werden sich die von ihnen begrenzten Ebenenstücke in der z-Ebene im allgemeinen überdecken, dagegen in der A-Ebene auf einblättrige Ebenenstücke führen.

Es sei $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$
dann führt $t^3 + t = z$ auf

$$\xi^3 - 3\xi\eta^2 + \xi = x$$
$$-\eta^3 + 3\xi^2\eta + \eta = y.$$

Diese Formeln übertragen die Koordinateneinteilung der XY-Ebene auf eine Einteilung der $\xi\eta$-Ebene durch Kurven dritter Ordnung, welche Fig. I

für die Parallelen zur X-Axe $y = 0, 1, 2$
und „ „ „ Y-Axe $x = 0, 1, 2$ darstellt.

Die Punkte, in denen Werte von z zusammenfallen, sind die $t_1 = \infty$, $t_2 = \frac{i}{\sqrt{3}}$, $t_3 = \frac{-i}{\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkte $z_1 = \infty$, $z_2 = \frac{2i}{3\sqrt{3}}$, $z_3 = \frac{-2i}{\sqrt{3}}$ und es sind die Verzweigungsschnitte zwischen ∞ und $\frac{2i}{3\sqrt{3}}$ und ∞ und $\frac{-2i}{\sqrt{3}}$ z. B. auf der Y-Axe anzulegen; in dem Windungspunkt $z = \infty$ zweiter Ordnung hängen die drei Blätter zusammen in den Windungspunkten erster Ordnung z_2 und z_3 geht erstes und zweites Blatt, zweites und drittes Blatt ineinander über.

Die drei übereinanderliegend gedachten Geraden der X-Axe gehen in drei getrennte Züge, bestehend aus der ξ-Axe

und einer Hyperbel (1) über; die Geraden $\parallel$ X-Axe ($Y \gtrless 0$) schmiegen sich, ebenfalls aus drei getrennten Zügen bestehend, an jene an und haben als Asymptoten die $\eta = 0$ und $\eta = \pm \sqrt{3}\,\xi$ gemeinsam. Die den Geraden $y = \pm \lambda$ entsprechenden Kurven liegen zueinander symmetrisch bez. der ξ-Axe. Die Überführung der dreiblättrigen Z-Ebene in die einblättrige t-Ebene, d. h. in eine einfach zusammenhängende Fläche wird in folgender Weise sehr leicht anschaulich; man schneidet die Z-Fläche längs der Verzweigungsschnitte auf und legt das erste und dritte Blatt um, so dass die drei Blätter bereits, ohne sich durchzusetzen, ineinander übergehen, hierauf lässt man die X-Axe des zweiten Blattes fest, legt die Verzweigungsschnitte unter den Winkel $\operatorname{tang} \varphi = \sqrt{3}$ fest und faltet die dazwischenliegenden Flächen (erstes Blatt und halbes zweites Blatt oben, halbes zweites Blatt und drittes Blatt unten), bis sie flach werden und erhält, wenn die drei Blätter mit Koordinateneinteilung versehen sind, ein ungefähres Bild der oben besprochenen Kurven; zeichnet man umgekehrt in der so erhaltenen t-Ebene gerade Linien und bringt dann die drei Blätter in ihre alte Lage, so erhält man ein ungefähres Bild der Kurven $\alpha\, t + \alpha_1\, t_1 + \beta = 0$, welche genau später besprochen werden. Die analytische Berechtigung dieses Verfahrens, den Übergang der z-Ebene in die A-Ebene im grossen übersehen zu können, kann man sich nach Analogie der Abbildung $t^3 = z$ überlegen; in letzterer leistet die Faltung die Forderung $\varphi = 3\varphi$ und die Radienänderung $\rho^3 = R$ muss hernach noch mit allen Punkten vorgenommen werden (z. B. durch die Tangenten an die Kurve $y' = -\left(\frac{4\,x'^3}{27}\right)$. Bei $t^3 + t = z$ ergibt sich für diese Betrachtung $R = \sqrt{r^6 + r^2 + 2\,r^4 \cos 2\,\varphi}$ $\left[\varphi = \frac{\pi}{4},\ r\sqrt{r^4 + 1}\ \varphi = \frac{\pi}{2}\ r\,(r^2 + 1)\right]$ und $\operatorname{tang} \psi = \dfrac{r^3 \sin^3 \varphi + r \sin \varphi}{r^3 \cos^3 \varphi + r \cos \varphi}$.

Die Kurven, welche den geraden Linien der t-Ebene entsprechen, welche umgekehrt in vorgelegter Aufgabe in

geradlinige übergeführt werden müssen, sind dargestellt durch die Parametergleichung:

$$\xi^3 - 3\xi\eta^2 + \xi = x$$
$$-\eta^3 + 3\xi^2\eta + \eta = y$$
$$\eta = a\xi + b$$

Diese Kurven sind algebraische Kurven dritter Ordnung, von denen die Fälle $\eta = \lambda$, $\xi = \lambda$, $\eta = \lambda\xi$ im folgenden näher betrachtet werden sollen (Taf. II):

Von den Kurven $\eta = \lambda$ gehen die Geraden zwischen $\eta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\eta = \pm\infty$ über in Doppelpunktskurven, welche zur y-Axe symmetrisch sind und je nach $y = \pm\lambda$ im oberen oder unteren Blatt verlaufen. Die Gerade $\eta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ gibt eine Kurve mit Spitze und η zwischen $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ geben Kurven mit Wendepunkten, welche, flacher werdend, schliesslich für $\eta = 0$ in die X-Axe ausarten. Die ersteren Kurven verlaufen, wie aus der t-Ebene ersichtlich ist, in zwei Blättern und überschreiten zweimal den Verzweigungsschnitt, letztere liegen nur in einem (zweiten) Blatte, überschreiten also den Verzweigungsschnitt nicht. In Fig. 1 und 2, Taf. III sind die Kurven $\eta = \frac{3}{4}$ und $\eta = \frac{1}{4}$ gezeichnet und es ist leicht zu sehen, welche Flächenstücke dem über und unter $\eta = \frac{3}{4}$ bezw. $\frac{1}{4}$ liegenden Teil der t-Ebene entsprechen.

Den Geraden $\xi = \lambda$ entsprechen Doppelpunktskurven dritter Ordnung $(-x + \lambda + \lambda^3)(8\lambda^3 + 2\lambda + x)^2 - 3\lambda y^2 = 0$, welche symmetrisch zur X-Axe sind und für $\xi = -\lambda$ nur nach der entgegengesetzten Seite verlaufen; wie aus der Figur der t-Ebene ersichtlich ist, verlaufen diese Kurven unter allen Umständen in den drei Blättern und durchsetzen zwei Verzweigungsschnitte; speziell der Geraden $\xi = 0$ entspricht $x = 0$ als dreifache Gerade. Somit dürfen Winkel, welche

ein und dieselbe Kurve z. B. in den Doppelpunkten einschliessen, nicht als Winkel gerechnet werden, da die beiden Züge der Kurve nicht in derselben Ebene liegen; das Gleiche gilt auch bei den Doppelpunktskurven $\eta = \lambda$; da $\xi = \lambda$ und $\eta = \lambda$ sich rechtwinklig durchsetzen, gelten von den Winkeln, welche die Kurven der Tafel II bilden, nur diejenigen, welche von zwei in demselben Blatt liegenden Kurven eingeschlossen werden, d. h. die Rechten. Es ist von Interesse, den Verlauf der von einer Kurve $\xi = \lambda$ rechts und links begrenzten Blätterstücke zu betrachten (Fig. 3, Taf. III). Durchläuft man in der t-Ebene $\xi = \frac{1}{2}$, in der z-Ebene die entsprechende Kurve in dem angegebenen Sinne, so entspricht der halben t-Ebene rechts in der z-Ebene das Flächenstück rechts der Kurve, das aus dem ersten Blatt kommt, über den Verzweigungsschnitt 1 in das zweite Blatt eintritt, über den Verzweigungsschnitt 2 in das dritte Blatt geht und hier teilweise vom ersten Blatt überdeckt wird. Schwieriger ist der Übergang der linken Halbebene in die entsprechenden Blätter der z-Ebene, da sich hier die Verzweigungspunkte im Innern befinden. Dem Raum, der vom unteren Verzweigungsschnitt und von der Geraden $\xi = \frac{1}{2}$ links begrenzt wird, entspricht der Raum im ersten Blatt, begrenzt vom Verzweigungsschnitt rechts und der Kurve links, dessen Begrenzung im Verzweigungspunkt einen Winkel 2π enthält (Verzweigungsschnitt doppelt zu zählen); über das obere Stück des Verzweigungsschnittes 1 erfolgt dann der Übergang ins zweite Blatt; das entsprechende Flächenstück in diesem Blatt wird begrenzt von den beiden Verzweigungsschnitten und dem kleinen Bogen der Schleife; die Begrenzung enthält zwei Winkel 2π, die aus den entsprechenden Winkeln π der t-Ebene entstanden sind, so dass in diesen Punkten die Konformität gestört ist, was bei den Kurvenpolygonen später zu berücksichtigen ist; analog ist dann der Übergang des oberen linken Ebenenstücks der t-Ebene.

Legt man die beiden Figuren der z- und t-Ebene entsprechend aufeinander, so ist die t-Ebene lückenlos überdeckt und ebenso die z-Ebene überall mit drei Schraffierungen, so dass die drei Blätter vollständig ausgefüllt sind.

In Tafel II sind ausserdem noch die Kurven $\eta = \pm \xi$ und $\eta = -\xi + 1$ gezeichnet, aus dem Verlauf der Geraden der t-Ebene kann man sich im übrigen den Verlauf beliebiger Kurven der z-Ebene sehr leicht ableiten, je nachdem sie die Verzweigungsschnitte überschreiten oder nur in einem Blatte verlaufen.

Kurvenpolygone.

Für die richtige Deutung der hier auftretenden Abbildungsfunktionen ist es notwendig, auf die verschiedenen Arten der abbildbaren Kurvenpolygone der z-Ebene einzugehen. Abbildbar sind sicher alle jene Polygone, welche in der t-Ebene auf geschlossene geradlinige führen; das sind in erster Linie alle jene Polygone, welche keinen Verzweigungspunkt im Innern enthalten und keinen Verzweigungsschnitt durchsetzen, welche somit als in einem einzigen Blatt liegend aufgefasst werden können und bei denen $t = \sqrt[3]{\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} + \frac{1}{27}}}$ ständig nur einer der drei Werte ist; bei solchen Polygonen spielt die Mehrdeutigkeit überhaupt keine Rolle. Zulässig sind dann auch alle jene Polygone, welche in mehreren Blättern verlaufen, wenn sie nur auf geschlossene Polygone der t-Ebene führen, bei denen also t_1, t_2, t_3 stetig ineinander übergehend gedacht werden können, indem sie einen Verzweigungsschnitt überschreiten oder einen Verzweigungspunkt im Innern enthalten. Zu berücksichtigen ist beim unmittelbaren Übergang von der z-Ebene zur Z-Ebene nur, dass in Verzweigungspunkten die Konformität gestört wird und somit Unstetigkeiten in den auftretenden Funktionen sich einstellen. Dagegen sind unzulässig solche Polygone, welche Verzweigungs-

schnitte überschreiten und trotzdem in einer Ebene liegen, welche somit in geradlinige der t-Ebene übergeführt, keine geschlossenen liefern, wie an der Figur (4, 5) der Tafel III zu ersehen ist; analytisch heisst das, man darf bei der Abbildungsfunktion beim Überschreiten des Verzweigungsschnittes nicht das gleiche t_i zur Wertberechnung beibehalten.

Es mögen im folgenden zur Erklärung des Gesagten einige Gruppen typischer Fälle herausgegriffen werden. Es entstehen besondere Fälle, die je nach dem Verzweigungspunkt im Innern oder auf dem Rande liegen oder der unendlich ferne Punkt im Innern liegt bezw. an der Begrenzung teilnimmt.

A. Polygone, welche sich in einem einzigen Blatt befinden:
   1. lauter Ecken erster Art;
   2. Polygone mit Verzweigungspunkten am Rande; die Winkel der t-Ebene sind die Hälften der in den Verzweigungspunkten gebildeten;
   3. der unendlich ferne Punkt am Rande; da der unendlich ferne Punkt ein Verzweigungspunkt zweiter Ordnung ist, sind die entsprechenden Winkel der t-Ebene der dritte Teil der Winkel, welche die Kurvenzüge der z-Ebene im unendlichen einschliessen;
   4. Kombination dieser drei Fälle, m-Ecken erster Art, p-Ecken zweiter Art, r-Ecken dritter Art.

B. Polygone in mehreren Blättern:
   1. m-Ecken erster Art; kein Verzweigungspunkt im Innern;
   2. m-Ecken dieser Art, p-Ecken zweiter Art, r-Ecken dritter Art, kein Verzweigungspunkt im Innern;
   3. Verzweigungspunkte im Innern; von besonderem Interesse ist der Fall des Quadrates in der t-Ebene und der entsprechenden dreiblättrigen Figur der z-Ebene;
   4. Der unendlich ferne Punkt im Innern; das Polygon muss auf jeden Fall in drei Blättern verlaufen.

Selbstverständlich gelten auch hier eine Reihe von Winkelrelationen, welche für den Nachweis der Holomorphität der Abbildungsfunktionen von Wichtigkeit sind; da aber dabei nichts Neues auftritt, ist es nicht nötig, auf sie einzugehen.

IV. Spezielle Fälle.

Es mögen im folgenden eine Anzahl spezieller Fälle behandelt werden, nämlich Flächenstücke der z-Ebene, welche auf einfache geradlinig begrenzte Polygone der t-Ebene führen, wobei als Winkel der Begrenzung der Auswertbarkeit der Integrale halber nur Winkel von 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π gewählt sind; für Abkürzung werde im folgenden immer $\varphi(t)$ statt $t^3 + t$ geschrieben; allgemeiner kann natürlich $\varphi(t)$ auch als beliebige rationale Funktion gedeutet und die dadurch vermittelte Abbildung ebenso wie bei $\varphi(t) = t^3 + t$ interpretiert werden.

1. Der einfachste Fall ist die Abbildung eines Ebenenstücks, das von einer einzigen Kurve begrenzt wird, in drei bezw. zwei Blättern verläuft und in der t-Ebene auf die Halbebene führt. (Fig. a, Taf. V.)

Ordnet man $z = \infty$, $t = \infty$ als Punkt des Randes und $Z = \infty$ einander zu, so hat man

$$t = a\,Z + b;\quad z = \varphi(a\,Z + b).$$

2. Ebenenstück begrenzt von zwei Kurven dritter Ordnung ohne Doppelpunkt und Spitze, in einem Blatt verlaufend; in der t-Ebene ein Streifen von zwei parallelen Geraden begrenzt; zwei Winkel 0 im Unendlichen. (Fig. 2 Taf. V, Fig. 2 Taf. IV.) Symmetrie zur ξ- und η-Axe:

$$t = \int_0^z \frac{d\,Z}{(Z - C_1)\,(Z - C_2)}$$

Den Punkten $z = \infty$, $t = \infty$ entspreche $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, dem Punkte $t = \frac{i}{2}$ $Z = 0$, $t = -\frac{i}{2}$ $Z = \infty$; die Abbildungsfunktion wird dann

$$t = \frac{1}{\pi} \log \frac{Z-1}{Z+1} - \frac{i}{2}$$
$$z = \varphi(t).$$

Die Transformation zum Einheitskreis ist $Z = i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$ und es mögen sich entsprechen:

Z:	0	∞	$+1$	-1
ζ:	-1	$+1$	$-i$	$+i$

$$t = \frac{1}{\pi} \log \frac{(1-i\zeta)^2}{1+i\zeta^2}; \quad z = \varphi(t).$$

Diese Abbildung:

$$z = \left[\frac{1}{\pi} \log \frac{(1-i\zeta)^2}{1+\zeta^2}\right]^3 + \frac{1}{\pi} \log \frac{(1-i\zeta)^2}{1+\zeta^2}$$

ist in den Figuren der Taf. VIII und IX vollständig durchgeführt; es zeigt sich dabei, dass nur ein kleiner Teil des Ebenenstücks der z-Ebene auch in der ζ-Ebene in derselben Grösse erscheint, dass hingegen der ganze übrige, ins unendliche sich erstreckende Streifen in den kleinen, frei gelassenen Raum des Einheitskreises hineingedrängt wird, wobei im Punkte $\zeta = \pm 1$ die Konformität gestört wird.

Es ist von Interesse, diese Abbildung bezüglich einiger Eigenschaften und der analytischen Fortsetzung vollständig zu studieren; dabei genügt es, nur den Zusammenhang zwischen t-Ebene und Einheitskreis zu betrachten, insbesondere bezüglich der analytischen Fortsetzung nur die beiden Halbebenen zu berücksichtigen, da die ihnen entsprechenden Flächenstücke der z-Ebene aus der Diskussion von $t^3 + t = z$ folgen.

Es lässt sich zeigen, dass die Symmetrielinien der t-Ebene in die Symmetrielinien der ζ-Ebene übergehen, nämlich die ξ-Axe in die H-Axe, die η-Axe in die Ξ-Axe, ferner, dass

die Linien $\eta = \frac{i}{2}$, und $\eta = -\frac{i}{2}$ in den Einheitskreis übergeführt werden.

Auf $\eta = \frac{i}{2}$ ist $t = \lambda + \frac{i}{2} = \frac{1}{\pi} \log \frac{(1 - i\zeta)^2}{1 + i\zeta^2}$

$$\frac{(1 - i\zeta)^2}{1 + \zeta^2} = e^{\lambda\pi} = \alpha$$

$$\zeta = -\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} + i\frac{\alpha^2 - 1}{1 + \alpha^2} = \rho \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} + \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{(1 + \alpha^2)^2}} = 1.$$

Das Gleiche gilt für $t = \lambda - \frac{i}{2}$, wobei α negativ wird; was sich nur in ζ äussert.

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - \alpha^2}{2\alpha}$, eine Formel, die zur Berechnung von λ aus φ und umgekehrt dienen kann und die richtige Zuordnung bestätigt.

Auf der ξ-Axe ist:

$$\xi = \lambda, \quad \eta = 0 \text{ d. h.}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \log \frac{(1 - i\zeta)^2}{1 + \zeta^2}$$

daraus $\zeta = i\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = iH$, d. h. rein imaginär.

Auf der η-Axe ist:

$$\xi = 0 \quad \eta = i\lambda$$

$$i\lambda = \frac{1}{\pi} \log \frac{(1 - i\zeta)^2}{1 + \zeta^2}$$

$$\zeta = i\frac{e^{i\lambda\pi} - 1}{e^{i\lambda\pi} + 1} = -\frac{\sin\lambda\pi}{\cos\lambda\pi + 1} = \Xi \text{ reell.}$$

Allgemein berechnet sich ζ aus $\xi + i\eta$:

$$\zeta = -\frac{2e^{\xi\pi}\sin\eta\pi + i(e^{2\xi\pi} - 1)}{e^{2\xi\pi} + 2e^{\xi\pi}\cos\eta\pi + 1}$$

Gerade durch den Anfangspunkt $H = \lambda' \Xi$ gehen über in

$$-\frac{e^{2\xi\pi} - 1}{2 e^{\xi\pi} \sin \eta\pi} = \lambda'.$$

Die analytische Fortsetzung der Funktion $t = \frac{1}{\pi} \log \frac{(1 - i\zeta)^2}{1 + \zeta^2}$ ergibt sich aus folgender Betrachtung

$$\Xi + i H = -\frac{2 e^{\xi\pi} \sin \eta\pi}{e^{2\xi\pi} + 2 \cdot e^{\xi\pi} \cos \eta\pi + 1} + i \frac{e^{2\xi\pi} - 1}{e^{2\xi\pi} + 2 e^{\xi\pi} \cos \eta\pi + 1}$$

In dieser Funktion ändern sich Ξ und H nicht, wenn man $\eta\pi$ mit $\eta\pi + 2n\pi$ vertauscht, also y mit $y + 2n$; d. h. das Innere des Einheitskreises wird abgebildet auf unendlich viele Parallelstreifen der t-Ebene, die aus dem Ursprünglichen durch Verschiebung um 1 nach oben und unten entstehen; in der z-Ebene bedeutet das Flächenstücke, die in zwei Blättern verlaufen und eine Form haben, wie sie in Taf. V, Fig. a gezeichnet sind; es wird somit die Hälfte der t- und z-Ebene durch die Fortsetzungen des Innern des Einheitskreises überdeckt. In der Z-Ebene entsprechen dem unendlich viele Blätter über der Halbebene $Y > 0$, welche von $Y = 0$ begrenzt werden.

In der obigen Funktion $\Xi + i H = \varphi(\xi, \eta)$ waren zunächst nur die Werte η von $-\frac{i}{2}$ bis $+\frac{i}{2}$ berücksichtigt; ihnen entsprachen die Werte von $\Xi = -1$ bis $\Xi = +1$ der ΞH-Ebene.

Es frägt sich, was man erhält, wenn man in der t-Ebene die Geraden $\eta = \frac{i}{2}$ und $\eta = -\frac{i}{2}$ überschreitet, d. h. die Werte $\eta = \frac{i}{2}$ bis $\eta = \frac{3i}{2}$ nimmt und umgekehrt, was dem Äusseren des Einheitskreises des ΞH-Ebene in der t-Ebene entspricht.

Wir bilden:

$$\sqrt{\Xi^2 + H^2} = \frac{4e^{2\xi\pi}\sin^2\eta\pi + (e^{2\xi\pi} - 1)^2}{(e^{2\xi\pi} + 1 + 2e^{\xi\pi}\cos\eta\pi)^2}.$$

Für $\eta = 0$ wird $\sqrt{\Xi + H^2} = \left(\frac{e^{\xi\pi} - 1}{e^{\xi\pi} + 1}\right)^2 < 1$ für alle ξ,

„ $\eta = \frac{1}{2}$ „ „ $= \left(\frac{e^{2\xi\pi} + 1}{e^{2\xi\pi} + 1}\right)^2 = 1$ für alle ξ

also wächst $\sqrt{\Xi^2 + H^2}$ wenn η von 0 bis $\frac{1}{2}$ wächst, da in dem oberen Ausdruck für die Wurzel der Zähler beständig wächst und der Nenner kleiner wird; nun überschreite η die Linie $\frac{i}{2}$:

Für $\eta = 1$ wird

$$\sqrt{\Xi^2 + H^2} = \left(\frac{e^{\xi\pi} + 1}{e^{\xi\pi} - 1}\right)^2$$

für alle $\xi < 1$, speziell für $\xi = 0$, $\eta = 1$ unendlich.

Von $\eta = \frac{1}{2}$ bis $\eta = 1$ wächst die Wurzel beständig, weil durch $2e^{\pi}\cos\eta\pi$ der Nenner beständig verkleinert wird.

Für $\eta = \frac{3}{2}$ wird die Wurzel $\left(\frac{e^{2\xi\pi} + 1}{e^{2\xi\pi} + 1}\right)^2 = 1$, fällt also von ∞ wieder bis 1.

Daraus folgt, dass dem äusseren des Einheitskreises ebenfalls unendlich viele Parallelstreifen der t-Ebene entsprechen, welche zwischen den zuerst betrachteten liegen, so dass die t-Ebene lückenlos ausgefüllt wird. In der z-Ebene entsprechen dem die übrigen zweiblättrigen Flächenstücke, so dass auch diese ganz überdeckt ist.

In der Z-Ebene entsprechen, wie schon erwähnt, dem Inneren des Einheitskreises unendlich viele $Y > 0$, ferner den äusseren unendlich viele Halbebenen $Y < 0$.

3. Das Polygon werde gebildet von zwei Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt und einer geraden Linie, so dass

es drei Winkel 0 im Unendlichen und einen Winkel 2π im Endlichen enthält; es verläuft in drei Blättern und windet sich um die zwei Verzweigungspunkte; in der t-Ebene besteht das zugehörige geradlinige Polygon aus zwei parallelen unbegrenzten Geraden und einer begrenzten und hat die gleichen Winkel. (Fig. 1, Taf. IV, Fig. 1, Taf. V.)

Die Abbildungsfunktion heisst:

$$t = a\int_0^Z \frac{(Z-A)\,dZ}{(Z-C_1)(Z-C_2)(Z-C_3)} + b$$

$$z = \varphi(t)$$

Zuordnung:					
t	0	$-\infty$	$-\infty$	∞
Z	0	-1	$+1$	∞

$$t = a\int_0^Z \frac{Z\,dZ}{Z^2-1} + b$$

$$t = a\log(Z+1)(Z-1) + b$$

die Konstanten a und b bestimmen sich aus $Z = 0$, $t = 0$

$$t = \log(Z+1)(Z-1) - i\pi$$

$$X^2 - Y^2 = 1 - e^{\xi}\cos\eta$$

$$2XY = -e^{\xi}\sin\eta$$

$\eta = 0 \quad \xi = 0 \qquad X = 0, Y = 0$

$\eta = 0 \quad \xi = -\lambda \qquad X = \pm\sqrt{1-e^{-\lambda}}, Y = 0$

$\eta = 0 \quad \xi = -\infty \qquad X = \pm 1, Y = 0$

$\eta = \pm\pi \left\{ \begin{matrix} \xi = +\infty \\ \xi = -\infty \end{matrix} \right. \begin{matrix} X = \infty, Y = 0 \\ X = 1 \end{matrix} \quad X = \pm\sqrt{1+e^{\xi}} > |1|$

die Linie $\eta = 0$ $\xi > 0$ ist Symmetrielinie und gibt

$$Y = 0, X = \sqrt{1-e^{\lambda}} = i\sqrt{e^{\lambda}-1}$$

rein imaginär.

$\eta = \pm\frac{\pi}{2}$ geht über in die Hyperbel $X^2 - Y^2 = 1$

$\xi = 0$ in die bizirkulare Kurve

$$(X^2+Y^2)^2 - 2(X^2-Y^2) = 0.$$

Die analytische Fortsetzung gestaltet sich ebenso wie bei der vorherigen Aufgabe, da η nur in $\sin\eta$ und $\cos\eta$ vor-

kommt; der Übergang zum Einheitskreis ergibt als schliessliche Abbildungsfunktion:

$$z = \varphi\left(\log 2 \cdot \frac{(\zeta^2+1)}{(1-\zeta^2)}\right).$$

4. Das Polygon enthalte vier Winkel 0 im Unendlichen, zwei Winkel 2π im Endlichen und werde gebildet von zwei vollständigen Kurven dritter Ordnung und je einem Zweige mit Winkel 2π in der in Fig. 3, Taf. V gezeichneten Weise; es verläuft in drei Blättern, enthält beide Windungspunkte und liefert in der t-Ebene ein Polygon, gebildet von zwei parallelen Geraden und zwei Halbgeraden. (Fig. 3, Taf. IV.)

Die Abbildungsfunktion heisst:

$$t = \int_0^Z \frac{(Z-A)(Z-B)\,dZ}{(Z-C_1)(Z-C_2)(Z-C_3)(Z-C_4)}$$

Zuordnung:

t	∞	∞	-1	∞	$+1$	∞
Z	∞	$-\sqrt{2}$	-1	0	$+1$	$\sqrt{2}$

$$t = a\int_0^Z \frac{Z^2-2}{Z(Z^2-1)}\,dZ + b$$

$$= a \log \frac{Z^2}{\sqrt{Z^2-1}} + b.$$

Entsprechen sich $Z = \pm\sqrt{2}$ und $t = \pm\frac{i\pi}{2}$, so geht die Funktion über in

$$t = \log \frac{\sqrt{Z^2-1}}{Z^2} + \frac{i\pi}{2} + \log 2$$

$Z = 0$	$t = -\infty$	$Z = \frac{1}{\lambda} < 1$,	$t = \pm i\pi + \lambda'$
$Z = \pm 1$	$t = +\infty$		
$Z = \pm\sqrt{2}$	$t = \pm\frac{i\pi}{2}$	$Z = \lambda > 1$,	$t = \pm\frac{i\pi}{2} + \lambda'$
$Z = \infty$	$t = \infty$	bis $\sqrt{2}$	
		$Z = \lambda > \sqrt{2}$,	$t = \pm\frac{i\pi}{2} + \lambda'$.

Symmetrielinien sind:

$$z = \lambda i, \quad t = -2\log\lambda + \frac{1}{2}\log(\lambda^2+1) + \log 2$$
$$= \text{reell}\,(\lambda > 0) \text{ d. h. } \eta = 0.$$

Analytische Fortsetzung wegen der Periodizität des log ebenso wie bei Beispiel 2.

5. Das Polygon enthalte die gleichen Winkel wie vorher, nur die Lage der Begrenzungskurven sei eine andere, indem zwei Halbgerade mit Winkel 2π an der Begrenzung teilnehmen. (Fig. 4, Taf. IV u. V.)

Zuordnung:

t	∞	$\log 2$	$+\infty$	$-\infty$	$\log 2$	$-\infty$
Z	-1	0	$+1$	-2	∞	2

$$t = a\int_0^Z \frac{(Z-A)(Z-B)\,dZ}{(Z-C_1)(Z-C_2)(Z-C_3)(Z-C_4)} + b$$

$$t = \log\frac{Z^2-4}{2(Z^2-1)} \qquad z = \varphi(t).$$

Allgemein lautet der Ansatz für diese Art von Polygonen mit i-Ecken mit Winkeln 2π und k-Ecken mit Winkel 0, wobei $k = i+2$ sein muss:

$$t = a\int_0^Z \frac{\Pi(Z-A_i)\,dZ}{\Pi(Z-C_k)} + b$$

$$t = a\log\{(Z-C_1)^\alpha (Z-C_2)^\beta (Z-C_3)^\gamma \ldots .\} + b.$$

6. Bildet man die ganze dreiblättrige Fläche ab, wobei man als Begrenzung eine Halbgerade des zweiten Blattes wählt und die unendlich fernen Punkte sich entsprechen lässt, so heisst die Abbildung

$$t = aZ^2 + b \qquad z = \varphi(t).$$

7. Wählt man bei dieser Abbildung als Begrenzung nur eine Strecke, z. B. im zweiten Blatt, so erhält man unter Berücksichtigung des unendlich fernen Punktes im Innern:

(Fig. 5, Taf. IV u. V.)

$$t = a \int_0^Z \frac{(Z - A)(Z - B)\, dZ}{(Z - \Gamma)^2 (Z - \Gamma_1)^2} + b.$$

Für die Zuordnung $A = 0$, $t = 0$, $B = \infty$, $t = 1$ und willkürliche Annahme von Γ bezw. Γ_1 (z. B. $= \pm 1$) heisst die Abbildung:

$$t = a \int_0^Z \frac{Z\, dZ}{(Z^2 + 1)^2} + b.$$

$t = \frac{Z^2}{Z^2 + 1}$, eine Abbildung, die natürlich aus der oberen erhalten werden kann durch $Z = \frac{1}{Z}$.

Nimmt man den unendlich fernen Punkt willkürlich an und entwickelt für diesen Wert die Funktion unter dem Integral, nämlich: $\frac{Z}{(Z^2 + 1)^2}$ in eine Potenzreihe von $Z - \Gamma$ und integriert sie, so erhält man:

$$t = -\left[\frac{Z}{(Z + \Gamma)^2}\right]_{Z = \Gamma} \cdot \left\{\frac{1}{Z - \Gamma} + \left\{\frac{1}{\Gamma} - \frac{2}{2\Gamma}\right\} \log (Z - \Gamma) + \ldots\right\}$$

d. h. der log fällt tatsächlich für alle Werte von Γ weg.

Bei anderer Wahl der Zuordnung, z. B. so, dass die den Punkten $t = \pm 1$ entsprechenden Punkte C_1 und C_2 nicht ins unendliche fallen, sondern ± 1 werden, heisst die Funktion:

$$t = \frac{Z}{2(1 + Z^2)} \qquad z = \varphi(t).$$

Man sieht, dass für reelle Z diese Funktion ein Maximum in $Z = \pm 1$, ein Minimum in $Z = \infty$ hat und den Rand $Z = \lambda$ auf die verlängte Strecke $-1 \leqq t \leqq +1$ überträgt; die Symmetrielinie $z = i\lambda$ geht über in die Symmetrielinie

$$t = \frac{2i\lambda}{1 - \lambda^2} \begin{cases} - & \text{für } \lambda > 1 \\ \infty & \text{„ } \lambda = 1 \\ + & \text{„ } \lambda = 1. \end{cases}$$

Dabei ist wieder dem unendlich fernen Punkte der t-Ebene (z-Ebene) der Punkt $Z = +i$ zugeordnet und die Bedingung für das Verschwinden des log in der nach $Z - i$ entwickelten Potenzreihe erfüllt, nämlich in:

$$-\left[\frac{Z^2-1}{(Z+1)^2}\right]\left\{\frac{1}{2(Z-i)}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(-\frac{2i}{2}-\frac{2}{2i}\right)}_{0}\log(Z-i)+P(Z-i)\right\}$$

aber in diesem Falle ist dieser Wert auch der einzige, für den $\log(Z-1)$ verschwindet und somit Eindeutigkeit gewahrt bleibt. Es frägt sich, was bei anderer Wahl von $Z = \Gamma$ in diesem Falle eintritt, welche Abbildung durch eine ohne Rücksicht auf logarithmisches Unendlichwerden aufgestellte Funktion vermittelt wird, und warum bei den früheren Abbildungsaufgaben, z. B. 2, 3, 4, der Logarithmus der Abbildungsfunktion nicht stört.

Gehen wir z. B. auf die Abbildung

$$t = \frac{1}{\pi}\log\frac{Z-1}{Z+1} - \frac{i}{2} \quad \text{(2. Beispiel)}$$

zurück. Das logarithmisch Unendlichwerden, das der unendlich ferne Punkt der t-Ebene in der Abbildungsfunktion verursacht, wird hier nicht vermieden, sondern ist für die Abbildung notwendig; das Null und Unendlichwerden der Funktion des Logarithmus und damit das Unendlichwerden des Logarithmus bedeutet für die Abbildungsfunktion

1. eine unendliche Vieldeutigkeit,
2. eine Unstetigkeit, d. h. einen plötzlichen Sprung um $i\pi$ im Unendlichen und zwar auf dem Rande.

Dieser Sprung vermittelt den Übergang von einer Parallelen (bezw. Kurve in der Z-Ebene) zur andern, während die Vieldeutigkeit der Abbildung unendlich vieler Flächenstreifen gleicher Art bedeutet. Wie ist es nun, wenn dadurch, dass der unendlich ferne Punkt ins Innere, Endliche transformiert wird, diese logarithmische Unstetigkeit im Endlichen erfolgt und die Bedingung des Nullwerden des Koeffizienten in der Reihenentwicklung nicht vermieden wird.

In obigem Beispiel sei die Zuordnung so, dass der einen Ecke $Z = \sqrt{2}$, der andern $Z = -\sqrt{2}$ entspricht und $\Gamma = +i$, $\Gamma_1 = -i$ sei.

$$t = \int_0^Z \frac{Z^2 - 2}{(Z^2 + 1)^2} \, dZ.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in bekannter Weise, so erhält man:

$$\left[\frac{Z^2 - 2}{Z + i}\right]_{Z=i} \left\{\frac{-2}{Z - i} + \left(-\frac{2i}{3} + \frac{2}{2i}\right) \log (Z - i) + P(Z - i)\right\}$$

der Logarithmus bleibt somit bestehen, ebenso für $Z = -i$; die Integration ergibt

$$t = \frac{3Z}{1 + Z^2} + \operatorname{arctg} Z.$$

Zu der rationalen Funktion tritt noch hinzu der arcus tangens, welcher eine Vieldeutigkeit und einen Sprung im Endlichen bedeutet und zwar in folgender Weise:

Es sei zunächst Z reell $= \lambda$, durchlaufe also den Rand; es herrscht Symmetrie zum Nullpunkt; für $Z = 0$ ist $t = 0 \pm \pi$; ein Maximum hat die Funktion $t = \frac{3\lambda}{1 + \lambda^2} + \operatorname{arctg} \lambda$ für $\lambda = \sqrt{2}$, $t = 2{,}36 \, (\pm n\pi)$; für $Z = \infty$ wird $t = \frac{\pi}{2} (\pm n\pi)$ und bricht in diesem Punkte ab; geht Z zu $-\infty$ über, so wird $t = -\frac{\pi}{2}$, hat also einen Sprung gemacht um π, die Periode des arctg; von da kehrt es über $-2{,}36$ nach 0 zurück.

Nun sei $Z = \lambda i$, wo λ positiv ist und zwar:

$$\lambda < 1 \qquad \overbrace{\phantom{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}}^{-}$$
$$t = i \left\{\frac{3\lambda}{1 - \lambda^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right\} (\pm \pi),$$

d. h. t ist rein imaginär, von 0 bis unendlich wachsend

$$t = \pm\frac{\pi}{4} - i\left\{\frac{3\lambda}{\lambda^2-1} + \frac{1}{2}\log\overbrace{\frac{\lambda-1}{\lambda-1}}^{\lambda>1}\right\},$$

d. h. die Gerade $\xi = \pm\frac{\pi}{4}(\pm\pi)$, η negativ.

Über den Teil der Geraden $X = 0$ zwischen 0 und 1 erfolgt der Übergang der entsprechenden Werte t stetig; über den Teil zwischen 1 und ∞ erfolgt der Übergang unstetig in einem Sprung von π. Dieser Sprung wird um so kleiner, je näher der Punkt Γ dem durch seine Bedingungsgleichung verlangten Werte kommt und verschwindet ganz, wenn Γ dieser Wert selbst wird. Aus der Periodizität von arcustangens folgt, dass man die Halbebene dabei nicht auf die ganze Ebene abbildet, sondern nur auf einen Streifen, der begrenzt wird von zwei parallelen Geraden, zwei parallelen Halbgeraden und einer Strecke.

Es mögen nun auch Winkel $\frac{\pi}{2}$ an der Begrenzung teilnehmen; der einfachste Fall ist der, dass das Innere bezw. Äussere zweier unter rechtem Winkel sich schneidender Kurven abgebildet wird. Die Transformationsformel dafür ist $z = \varphi(\sqrt{Z})$ bezw. $z = \varphi(Z\sqrt{Z})$. In den folgenden Beispielen mögen mindestens zwei Winkel auf dem Rande des Kurvenpolygons sein.

8. Das Flächenstück werde begrenzt von der Geraden $Y = 0$ im zweiten Blatt, von dem Stück der Geraden $X = 0$ bis zum Verzweigungspunkte, so dass zwei Winkel $\frac{\pi}{2}$ auftreten; es setzt sich dann ins erste Blatt über den Verzweigungsschnitt hinüber fort und hat hier noch als Begrenzung ein Stück der Geraden $X = 0$ vom Verzweigungsschnitt nach unten mit Winkel 2π; in der t-Ebene ist die Begrenzung die Gerade $Y = 0$ und eine senkrecht auf ihr stehende Strecke. (Fig. 7, Taf. IV u. V.)

Abbildungsfunktion: $t = a\int_0^z \frac{(Z-A)\,dZ}{\sqrt{(Z-C_1)(Z-C_2)}} + b.$

Zuordnung:

$t =$	∞	0	0	i
$Z =$	∞	1	-1	0

$$t = a\int_0^z \frac{Z\,dZ}{\sqrt{Z^2-1}} + b = \sqrt{Z^2-1} \qquad -1 < z < 1 \text{ t rein imag.}$$
$$z > 1 \text{ t reell}$$
$$= i\lambda \text{ rein imag.}$$
$$z = \varphi(\sqrt{Z^2-1})$$

9. Das Polygon unterscheide sich von dem vorherigen dadurch, dass nicht die ganze X-Axe als Begrenzung gewählt wird, sondern nur eine Strecke, so dass zwei Winkel 2π dazu kommen und somit das ganze erste Blatt noch hinzugenommen wird. (Fig. 8, Taf. IV.)

$$t = a\int_0^z \frac{(Z-A)(Z-B)(Z-C)\,dZ}{\sqrt{(Z-C_1)(Z-C_2)(Z-\Gamma)^2(Z-\Gamma_1)^2}} + b.$$

Zuordnung:

t	i	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	
Z	0	± 1	$\sqrt{3}$	∞	

Γ und Γ_1 (rein imaginär) bestimmen sich aus:

$$\frac{1}{\Gamma i} + \frac{2\Gamma i}{-\Gamma^2-2} - \frac{2\Gamma i}{2(-\Gamma^2-1)} - \frac{1}{\Gamma i} = 0 \qquad \Gamma = i,$$

so dass das Integral lautet

$$t = \int_0^z \frac{Z(Z^2-3)\,dZ}{\sqrt{Z^2-1}\,(Z^2+1)^2} = \frac{\sqrt{Z^2-1}}{Z^2+1}, \qquad z = \varphi(t).$$

Rückt der Punkt i mit der Ecke 2π ins Uneudliche, so heisst das Integral

$$t = \int_0^z \frac{Z^2-2}{Z^3\sqrt{Z^2-1}} = \frac{\sqrt{Z^2-1}}{Z^2}$$

die Funktion $\frac{Z^2-2}{Z^3\sqrt{Z^2-1}}$ gibt entwickelt die Reihe

$$\left[\frac{Z^2-2}{\sqrt{Z^2-1}}\right]_{Z=0}\cdot\left\{\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{Z^2}\left(\frac{Z^3}{(Z^2-2)(Z^2-1)}\right)_{Z=0}+\frac{1}{Z}[Z^2\chi(Z)]+PZ\right\}$$

so dass tatsächlich die logarithmische Unstetigkeit verschwindet.

10. Das Polygon werde ebenso gebildet wie das vorherige (8) mit dem Unterschied, dass das zweite und dritte Blatt sich nicht ins Unendliche erstrecken, sondern abgegrenzt werden durch eine Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt. In der t-Ebene besitzt somit das Polygon einen Winkel 2π, zwei Winkel $\frac{\pi}{2}$, zwei Winkel 0 im Unendlichen; hier ist wieder zum Übergang ein Sprung nötig und somit Vieldeutigkeit erlaubt, da es sich nur um einen Streifen handelt. (Fig. 9, Taf. IV u. V.)

Zuordnung:	t	2	1	0	— 1	2
	Z	∞	0	i	0	$-\infty$

$$t = a\int_0^Z \frac{Z\,dZ}{(Z^2-4)\sqrt{Z^2-1}} = \log\frac{\sqrt{Z^2-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{Z^2-1}-\sqrt{3}}.$$

Analytische Fortsetzung ebenso wie in allen Fällen, wo man Streifen (periodische Funktionen) hat.

11. Das Polygon verlaufe im zweiten und dritten Blatt und werde gebildet von zwei symmetrisch liegenden Kurven, die aus dem dritten Blatt ins zweite gehen und hier unter rechten Winkeln auf ein Stück einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt treffen; in der t-Ebene ist das entsprechende Polygon gebildet von zwei parallelen Halbgeraden und einer Strecke, die mit ihnen rechte Winkel bildet, also mit zwei Winkeln $\frac{\pi}{2}$ und einem Winkel 0 im Unendlichen. (Fig. 10, Taf. IV u. V.)

$$t = a\int_0^z \frac{dZ}{\sqrt{Z^2-1}} + b = a\log(Z+\sqrt{Z^2-1}) + b$$

$$= [a' \arcsin Z + b]$$

eine Abbildung, die zur Überführung konfokaler Ellipsen und Hyperbeln in gerade Linien dient; ebenso lässt sich das äussere eines solchen Polygons in der z-Ebene bezw. t-Ebene abbilden, wiederum mit einem Sprung im Unendlichen, wobei man das ganze erste Blatt noch hinzunehmen muss.

$$t = \int^z \frac{\sqrt{Z^2-1}}{Z^3}\,dZ = -\frac{\sqrt{Z^2-1}}{Z^2} + \operatorname{arctg}\sqrt{Z^2-1}.$$

12. Das Flächenstück verlaufe in drei Blättern und habe als Begrenzung zwei spezielle Kurven, nämlich zwei unter rechtem Winkel sich schneidende Strecken der X- und Y-Axe; diese Begrenzung hat im ersten Blatt einen Winkel 2π, im zweiten Blatt die Winkel 2π, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$; das dritte Blatt wird unbegrenzt dazu genommen; in der t-Ebene erhält man dieselbe Begrenzungsfigur und die Abbildung lautet:

(Fig. 11, Taf. IV u. V.)

$$t = a\int_0^z \frac{(Z^2-1)\,dZ}{(Z^2+\alpha^2)\sqrt{Z}} + b = \frac{\sqrt{Z}}{(Z^3+3)^2};\quad z = \varphi(t)$$

da α sich bestimmt aus:

$$\frac{2\alpha i}{-\alpha^2-1} - \frac{2}{2\alpha i} - \frac{1}{2\alpha i} = 0 \qquad \alpha = \sqrt{3}$$

$$Z = \lambda \quad t = \frac{\sqrt{\lambda}}{(\lambda^2+3)^2},\ \lambda = \infty \quad t = 0$$

Maximum für $\lambda = 1$

$$Z = -\lambda \quad t = \frac{i\sqrt{\lambda}}{(\lambda^2+3)^2} \text{ rein imaginär und } \lambda = \infty \quad t = 0$$

Maximum für $\lambda = 1$

$$Z = i\lambda \quad t = \frac{\sqrt{\lambda}\,\sqrt{i}}{(-\lambda^2+3)^2} = \frac{\sqrt{\lambda}(1+i}{\sqrt{2}\,\lambda_1^2} \text{ die Gerade } \eta = \xi.$$

Rückt eine der Ecken 2π ins Unendliche, so ändert sich die Zuordnung und bei entsprechender Wahl heisst die Abbildungsfunktion:

$$t = \int \frac{(3Z-4)\,dZ}{Z^3\sqrt{Z-1}}.$$

Entwickelt man den Ausdruck unter dem Integral in eine Reihe, so lautet die Entwicklung:

$$\left[\frac{3Z-4}{\sqrt{Z^2-1}}\right]_{Z=0} \left\{\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{Z^2}\left(\frac{3}{3Z-4}-\frac{1}{2(Z-1)}\right)+\frac{1}{Z}\left[\frac{-9}{(3Z-4)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2(Z-1)^2}+\left(\frac{3}{3Z-4}-\frac{1}{2(Z-1)}\right)^2\right]+P\right\}_{Z=0}$$

d. h. der Koeffizient von $\frac{1}{Z}$ wird 0; die Abbildung lautet somit

$$t = \frac{\sqrt{Z-1}}{Z^2} \qquad z = \varphi(t).$$

13. Das Flächenstück verlaufe in zwei Blättern und werde begrenzt von zwei Kurven $\eta = \lambda$ und zwei Kurven $\xi = \lambda$ in der in Fig. 12 angegebenen Weise; in der t-Ebene hat man den Raum, der von den Schenkeln zweier rechten Winkel mit parallelen Schenkeln begrenzt wird, also eine Begrenzung mit Winkeln 0, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ hat. Hier ist wieder an den beiden Stellen mit Winkeln 0 ein Sprung im Unendlichen nötig. (Fig. 12, Taf. IV, Fig. 1, Taf. VI.)

Die Abbildung lautet:

$$t = a\int_0^Z \frac{\sqrt{Z-A_1}\,dZ}{(Z-C_1)(Z-C_2)\sqrt{Z-A_2}} + b.$$

Wenn C_1 und C_2 symmetrisch liegen, A_1 ins Unendliche und A_2 in den Nullpunkt fällt, geht die Formel über in:

$$t = a\int_0^Z \frac{dZ}{(Z^2-1)\sqrt{Z}} + b$$

und bei entsprechender Zuordnung in:

$$t = \log \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1} \cdot \left(\frac{\sqrt{z}-i}{\sqrt{z}+i}\right)^i - i\pi \qquad z = \varphi(t).$$

Es ist von Interesse, auf diese Abbildung der Z-Ebene auf die t-Ebene etwas näher einzugehen:

$$t = \log \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1} + i \log \frac{\sqrt{z}-i}{\sqrt{z}+i} - i\pi.$$

Es sei $z = \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad 1 \leqq \lambda \leqq \infty$, d. h. $0 \leqq Z \leqq 1$

$$t = \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + i \log \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} - i\pi$$

$$= \log \frac{\lambda-1}{\lambda+1} + \log(-1) - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda}{\lambda^2-1} - i\pi$$

und mit Berücksichtigung der Vieldeutigkeit des Logarithmus und Arcustangens:

$$t = \log \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \pm (2n+1)\pi i - \operatorname{arctg} \frac{2\lambda}{\lambda^2-1} \mp 2n\pi - i\pi.$$

$\lambda = \infty \qquad t = \pm 2n\pi i \mp 2n\pi$

$\lambda > 1 \qquad t = -\pm 2n\pi i \mp 2n\pi$

$\lambda = 1 \qquad t = -\infty \pm 2n\pi i \mp 2n\pi,$

d. h. der Strecke von 0 bis 1 der Z-Ebene entsprechen unendlich viele Gerade $2n\pi i$ unendlich oft je nach dem Anfangspunkt $2n\pi$ überdeckt.

Es sei $z = \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad 0 \leqq \lambda \leqq 1$, d. h. $1 \leqq Z \leqq \infty$

$$t = \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + i \log \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} - i\pi$$

$$= \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + \operatorname{arctg} \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} \pm 2n\pi - i\pi.$$

Setzt man nun $z = -\lambda^2$, so erhält man

$$t = \log \frac{i\lambda-1}{i\lambda+1} + i \log \frac{\lambda-1}{\lambda+1} - i\pi,$$

d. h. denselben Ausdruck wie vorher, nur dass reell und imaginär vertauscht ist, was vorher Gerade $\parallel \xi$-Axe waren,

werden jetzt Gerade $\parallel \eta$-Axe und umgekehrt, so dass also die negative Y-Axe in zu den ersten Geraden senkrechte Gerade übergeführt wird.

Dass die Symmetrielinie $Y = i\lambda^2$ übergeführt wird in eine Symmetrielinie der t-Ebene lässt sich in folgender Weise zeigen:

$$t = \log \frac{\lambda\sqrt{i} - 1}{\lambda\sqrt{i} + 1} + i \log \frac{\lambda\sqrt{i} - i}{\lambda\sqrt{i} + i} - i\pi$$

$$= \log \frac{1 - \lambda\sqrt{i}}{1 + \lambda\sqrt{i}} + i \log \frac{\lambda - \sqrt{i}}{\lambda + \sqrt{i}}$$

$$\frac{1 - \lambda\sqrt{i}}{1 + \lambda\sqrt{i}} = \frac{1 - \sqrt{2}\lambda + \sqrt{2}\lambda^2 - \lambda^4}{1 + \lambda^4} + i \frac{-\sqrt{2}\lambda + 2\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda^3}{1 + \lambda^4} = \alpha + i\beta$$

$$\frac{\lambda - \sqrt{i}}{\lambda + \sqrt{i}} = \frac{-1 + \sqrt{2}\lambda - \sqrt{2}\lambda^2 + \lambda^4}{1 + \lambda^4} + i \frac{-\sqrt{2}\lambda + 2\lambda^3 - \sqrt{2}\lambda^3}{1 + \lambda^4} = -\alpha + i\beta$$

$$t = \log(\alpha + i\beta) + i \log(-\alpha + i\beta)$$

$$= \alpha' + i\beta' + i(\alpha' - i\beta')$$

$$\xi + i\eta = \alpha'(1 + i) + \beta'(1 + i) = (1 + i)(\alpha' + \beta')$$

$$\frac{\xi}{\eta} = 1.$$

14. Ein ähnlicher Fall wie der vorherige ist folgender: Das Flächenstück verlaufe in den drei Blättern und werde begrenzt von drei Kurven $\eta = \lambda$ und zwei Kurven $\xi = \lambda$ in der Weise, dass es drei Winkel 0 im Unendlichen und zwei Winkel $\frac{3\pi}{2}$ enthält. In der t-Ebene entspricht ihm der Raum, der begrenzt wird von einer Geraden und den Schenkeln zweier rechten Winkel, d. h. ein Raum, der von drei ins Unendliche gehenden Parallelstreifen begrenzt wird. (Fig. 13, Taf. IV, Fig. 2, Taf. VI.)

Die Abbildungsfunktion lautet:

$$t = \log \frac{\sqrt{Z^2-1}-2}{\sqrt{Z^2-1}+2}\left\{\frac{\sqrt{Z^2-1}+i}{\sqrt{Z^2-1}-i}\right\}^i \qquad z = \varphi(t).$$

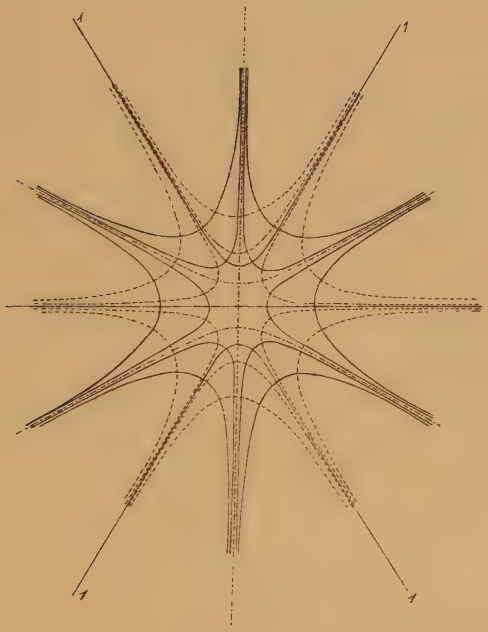
In dieser Weise lassen sich noch eine Reihe von mehrblättrigen Flächenstücken ausführen, die schliesslich auf auswertbare Integrale führen, und, wie schon erwähnt, bei einer beliebigen rationalen Funktion $z = \varphi(t)$ die zugehörigen Abbildungen deuten.

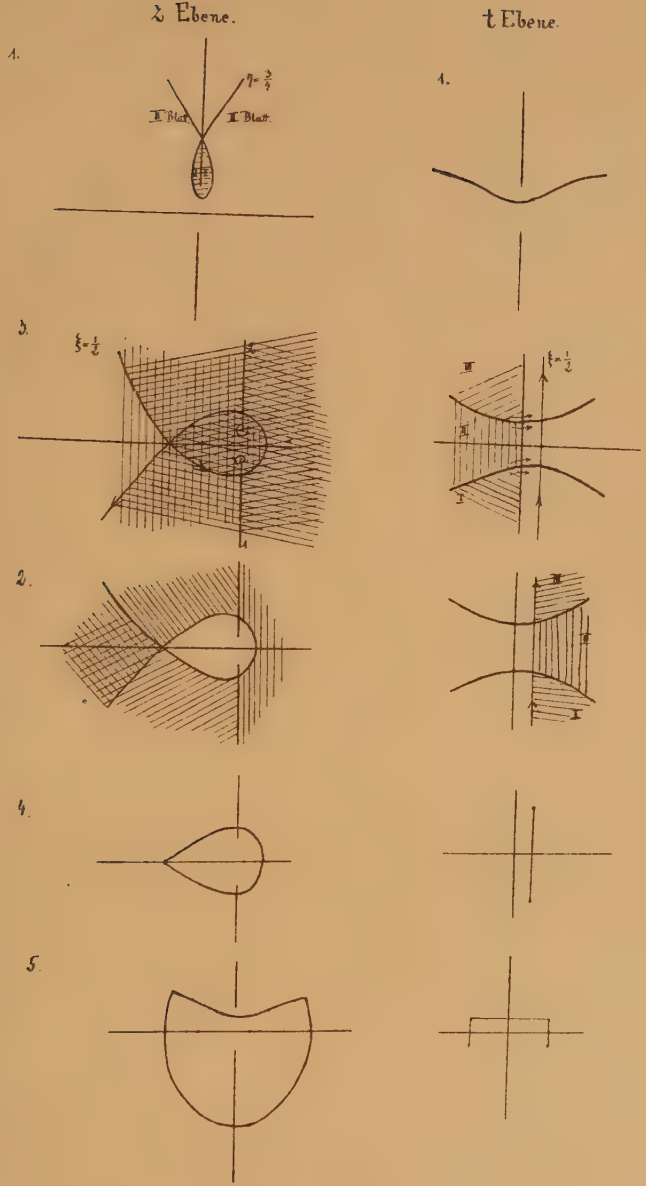
Es sei noch einer der Fälle erwähnt, in denen man bei der Aufstellung der Abbildungsfunktion auf elliptische Integrale geführt wird; das ist immer der Fall, wenn an der Begrenzung mehr als zwei Winkel $\frac{\pi}{2}$, bezw. $\frac{3\pi}{2}$ teilnehmen; im einfachsten Falle des Quadrates erhält man in der z-Ebene ein Flächenstück, das in drei Blättern verläuft und die in Fig. 3, Taf. VI angegebene Form hat.

Vita.

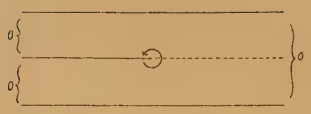
Ich wurde am 24. Oktober 1876 zu Ebersberg, Kgl. Bezirksamt Ebersberg, geboren. In den Jahren 1887—1895 besuchte ich das Kgl. Gymnasium Passau, das Kgl. Gymnasium Burghausen und das Kgl. Wilhelms-Gymnasium München. In den Jahren 1895 bis 1900 oblag ich an der Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität dem Studium der Mathematik und Physik, sowie allgemein bildender Disziplinen. In den Jahren 1898 bezw. 1900 bestand ich den ersten bezw. zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik. Im Jahre 1900 wurde ich zum Assistenten für Mathematik an der technischen Hochschule München, im Jahre 1902 zum Reallehrer für Mathematik und Physik an der Kgl. Realschule Deggendorf ernannt.

Carl Horn.


1
1
1
1

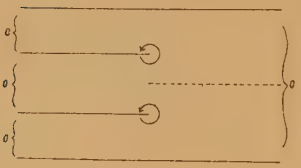

λ Ebene.
t Ebene.
1.
II Blatt.
I Blatt.
1.
3.
2.
4.
5.

1.



2.

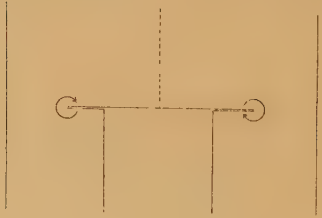
3.



4

5

6

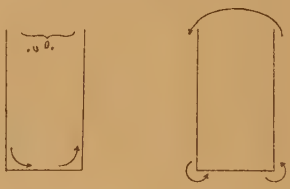


7

8

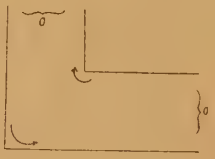
9

10

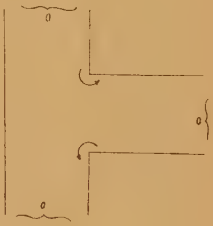


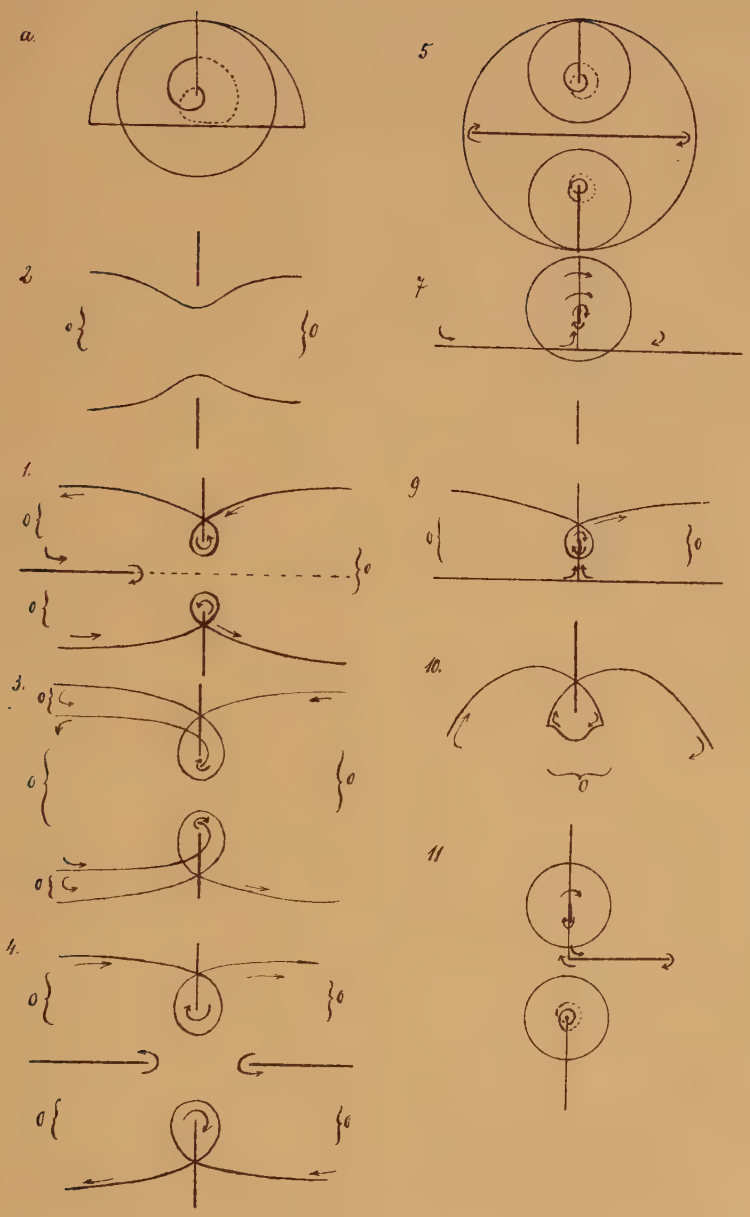
11

12

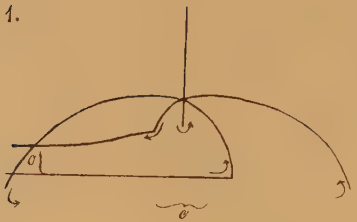


13.

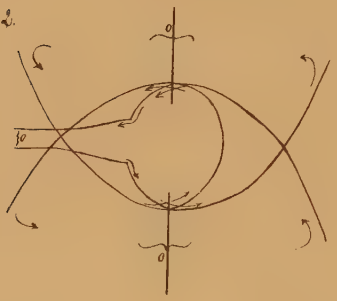



a.
2.
1.
3.
4.
5
7
9
10.
11

1.

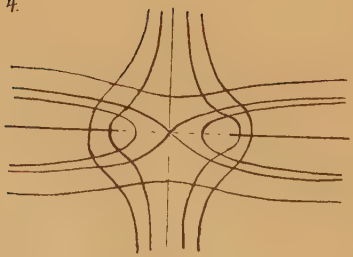


2.



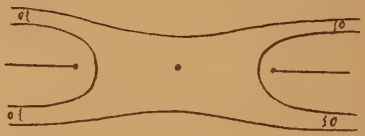
3.

4.

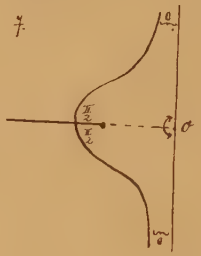


5

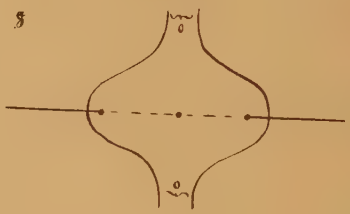
6.



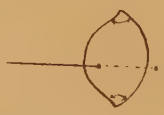
7.

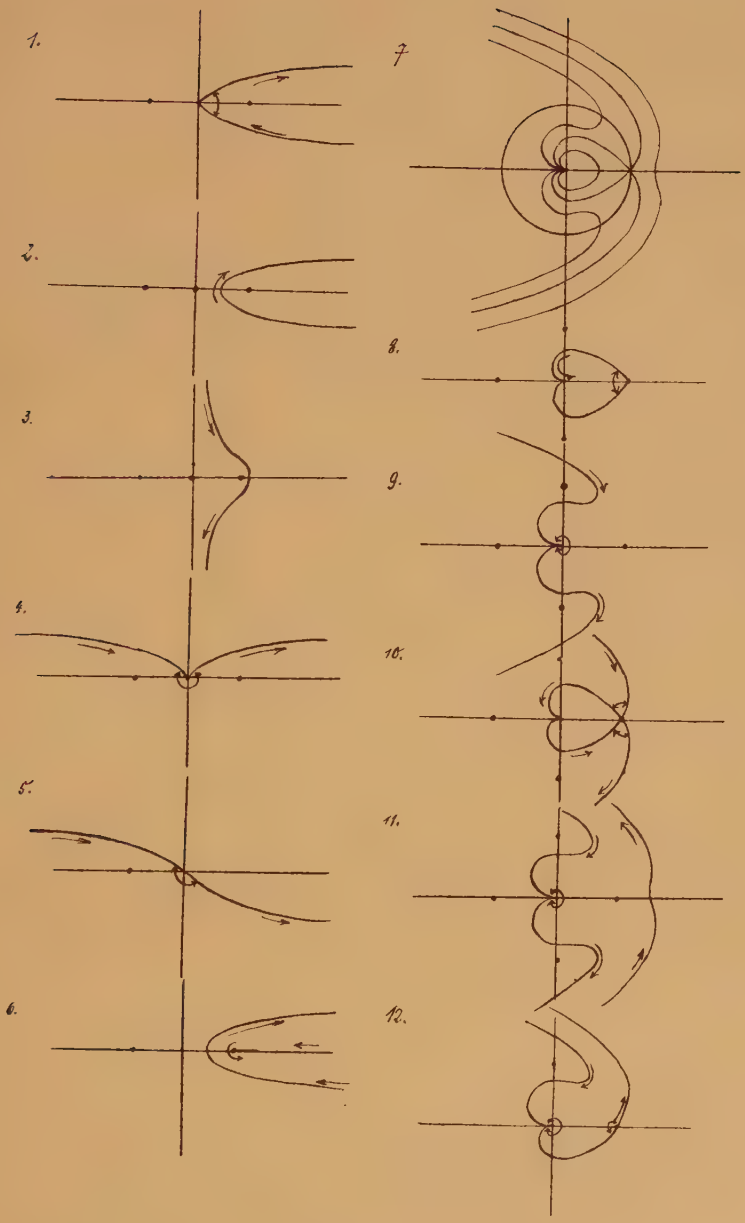
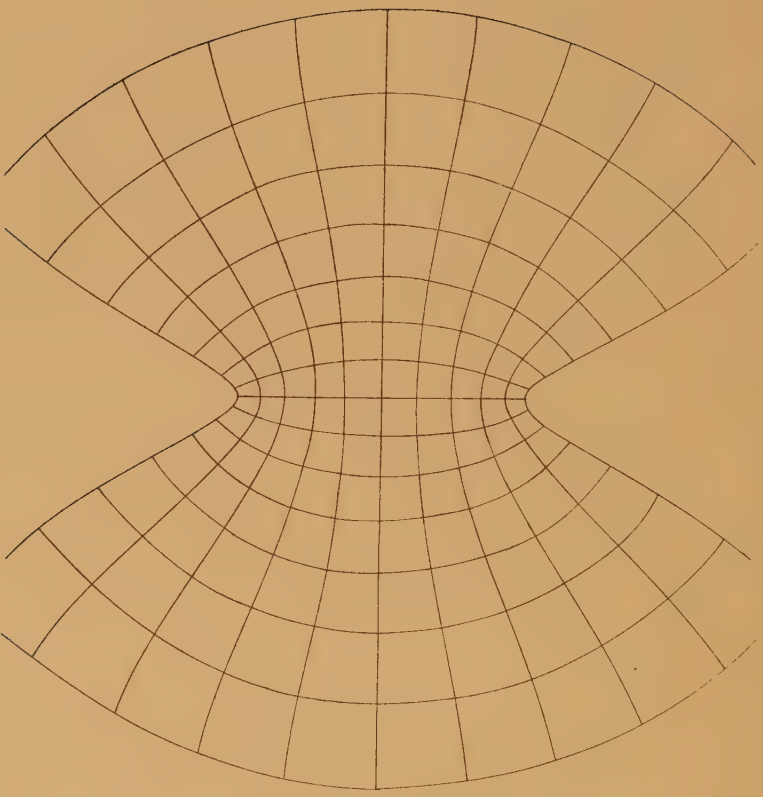
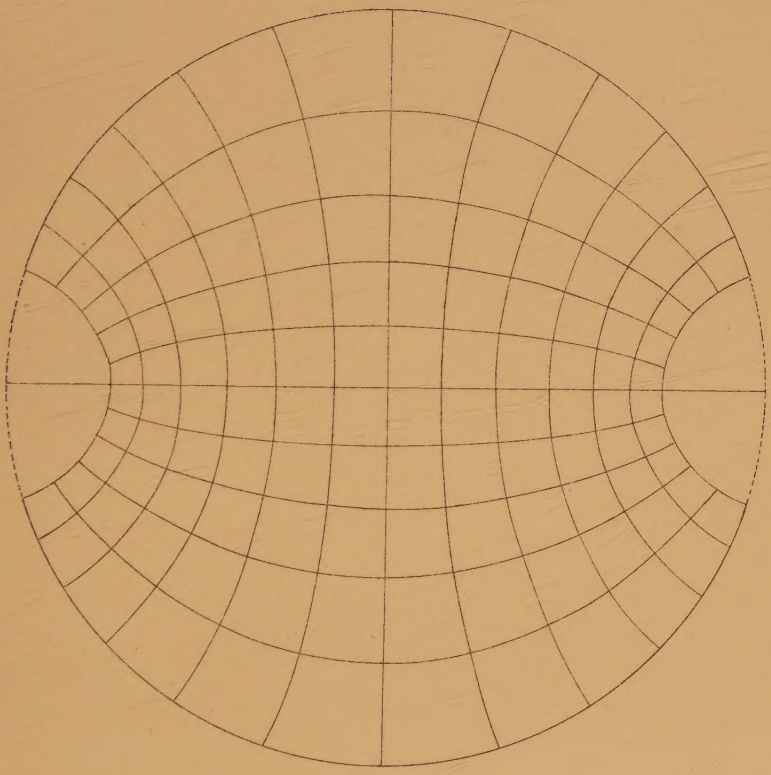


8



9




1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.